2 RS 46114

THREE YEAR B.A./B.Sc. (CBCS) DEGREE EXAMINATION, JUNE/JULY 2023.

FOURTH SEMESTER

Mathematics

Paper IV – REAL ANALYSIS

(w.e.f. 2020-21 Admitted Batch)

Time : Three hours

Maximum : 75 marks

(No additional sheet will be supplied)

SECTION A — (5 × 5 = 25 marks)

Answer any FIVE questions.

Each question carries 5 marks.

ఏవేని ఐదు ప్రశ్నలకు సమాధానములు వ్రాయుము.

ప్రతి ప్రశ్నకు 5 మార్కులు.

1. Test the convergence of $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$.

   $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ శ్రేణి యొక్క అభిసరణతను పరిశీలించుము.

2. Test the convergence of $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

   $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ శ్రేణి యొక్క అభిసరణతను పరిశీలించుము.

3. Show that the function designed by $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$; $x\neq 0$ and $f(0)=0$ is continuous at $x=0$.

   $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$; $x\neq 0$ మరియు $f(0)=1$గా గల ప్రమేయము $x=0$ వద్ద అవిచ్ఛిన్నం అవుతుంది అని నిరూపించండి.

4. Discuss the continuity of the function $f(x)=\frac{x\,e^{1/x}}{1+e^{1/x}}$ if $x\neq 0$ and $f(x)=1$ if $x=0$; $f(x)=1$.

   పై ప్రమేయము $x=0$ వద్ద అవిచ్ఛిన్నం అగునో, లేదా వివరించుము.

5. State and prove Lagrange's mean value theorem.

   లెంగ్రాజ్ మాధ్యమ విలువల సిద్ధాంతాన్ని నిర్వచించి, నిరూపించండి.

Scanned with OKEN Scanner

CamScanner

6. Verify Roll's theorem for $f(x) = \cos x$ in $[\pi, 5\pi]$

$f(x) = \cos x$ ప్రమేయమును $[\pi, 5\pi]$ పై రోలె సిద్ధాంతమును ధృవీకరించుము.

7. If $f(x) = x^3$ on $[0, 1]$ and $P = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{3}, 1\right\}$ then compute $U(P,f)$ and $L(P,f)$.

$f(x) = x^3$ మరియు $P = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{3}, 1\right\}$ గా ఇచ్చిన ప్రమేయాన్ని $[0, 1]$ పై తీసుకొనిన $U(P,f)$ మరియు $L(P,f)$ కనుగొనుము.

8. If $f:[a\ b] \to R$ is a bounded function then show that $\underline{\int_a^b} f(x)dx \le \overline{\int_a^b} f(x)dx$.

$f:[a\ b] \to R$ పరిబద్ధ ప్రమేయము అయితే $\underline{\int_a^b} f(x)dx \le \overline{\int_a^b} f(x)dx$ అని నిరూపించండి.

9. Prove that $\frac{1}{4} < \int_a^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} < \frac{1}{\sqrt{15}}$ by Integral calculus.

సమాకలన పద్ధతి నుండి $\frac{1}{4} < \int_a^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} < \frac{1}{\sqrt{15}}$ అని చూపండి.

10. If $f, g \in R\ [a\ b]$ and prove that $f + g \in R[a\ b]$ and $\int_a^b (f+g)(x)\,(dx) = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)\,dx$

$f, g \in R\ [a\ b]$ అయిన $f + g \in R[a\ b]$ మరియు $\int_a^b (f+g)(x)\,(dx) = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)\,dx$ అవుతుంది అని చూపండి.

SECTION B — (5 × 10 = 50 marks)

Answer ALL questions.

Each question carries 10 marks.

అన్ని ప్రశ్నలకు సమాధానములు వ్రాయుము.

ప్రతి ప్రశ్నకు 10 మార్కులు.

11. Test for absolutely convergence or conditionally convergence of $\Sigma \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1} n$.

$\Sigma \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1} n$ యొక్క సంపూర్ణ అభిసరతను లేక ఖచ్చిత అభిసరణతను పరిశీలించండి.

Or

12. State and prove D-Alembert's ratio test.

డి-ఆంబర్ట్ నిష్పత్తి పరీక్షను నిర్వచించి నిరూపించుము.

Scanned with OKEN Scanner

CamScanner

13. State and prove Intermediate value theorem of continuity.

అవిచ్ఛిన్నతపై మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతమును నిర్వచించి నిరూపించుము.

Or

14. Determine the constants a, b so that the function defined by $f(x) = \left.\begin{matrix} 2x+1 & \text{if } x \le 1 \\ ax^2+b & \text{if } 1 < x < 3 \\ 5x+2a & \text{if } x \ge 3 \end{matrix}\right\}$ is continuous everywhere.

$f(x) = \left.\begin{matrix} 2x+1 & \text{if } x \le 1 \\ ax^2+b & \text{if } 1 < x < 3 \\ 5x+2a & \text{if } x \ge 3 \end{matrix}\right\}$ గా నిర్వచించిన ప్రమేయము అవిచ్ఛిన్నము అయితే a, b స్థిరాంకాలను కనుగొనండి.

15. Discuss the differentiability at $x = 0$ of $f(x) = \dfrac{x(e^{1/x} - e^{-1/x})}{(e^{1/x} + e^{-1/x})}$ if $x \ne 0$ and $f(x) = 0$ if $x = 0$

పై ప్రమేయము యొక్క అవకలనీయతను $x = 0$ వద్ద చర్చించండి.

Or

16. State and prove Cauchy's mean value theorem

కోషి మధ్యమ విలువ సిద్ధాంతమును నిర్వచించి నిరూపించండి.

17. If $f : [a \;\; b] \to R$ is monotonic on $[a \;\; b]$ then prove that f is integrable on $[a \;\; b]$

$f : [a \;\; b] \to R$ ప్రమేయం $[a \;\; b]$ పై ఏకదిష్టం అయితే $[a \;\; b]$ పై f ప్రమేయము సమాకలనీయం అని చూపండి.

Or

18. Show that $f(x) = \cos x$ is integrable on $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ and $\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = 1$.

$f(x) = \cos x$ ప్రమేయం $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ మీద సమాకలనీయం అవుతుంది మరియు $\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = 1$ అని చూపండి.

Scanned with OKEN Scanner

CS CamScanner

19. Show that $\underset{n \to \infty}{Lt}\left[\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n}\right]=\log 3$.

$\underset{n \to \infty}{Lt}\left[\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n}\right]=\log 3$ అని చూపండి.

Or

20. State and prove fundamental theorem of Integral Calculus.

సమాకలనము యొక్క ప్రాథమిక సిద్ధాంతం లేక మూల సిద్ధాంతమును ప్రవచించి, నిరూపించుము.

CS CamScanner